Objectifs :
Réaliser l'acquisition analogique des oscillations libres d'un pendule. On utilisera un capteur analogique d'angle et on mettra en place la dérivation analogique de son signal.

Capacités mises en œuvre :

☐ Agir sur un signal électrique à l'aide des fonctions simples suivantes :

☐
- isolation, amplification, filtrage ;
- Mettre en œuvre les fonctions de base de l'électronique réalisées par des blocs dont la structure ne fait pas l'objet d'une étude spécifique
- Associer ces fonctions de base pour réaliser une fonction complexe en gérant les contraintes liées aux impédances d'entrée et/ou de sortie des blocs

☐ Mettre en œuvre un accéléromètre, par exemple avec l'aide d'un microcontrôleur.

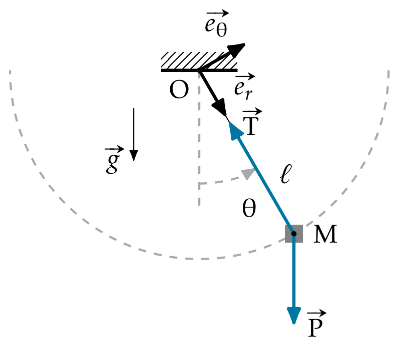
Matériel :
- *un pendule mécanique formé d'une tige, lestée par une masse amovible, pouvant tourner autour d'un axe*
- *une ficelle enroulée autour de l'axe de rotation, tendue par un ressort pour accentuer le frottement solide sur l'axe*
- *des plaques en plastique pouvant être fixées sur la tige pour augmenter les frottements avec l'air*
- *une carte* `Sysam` *d'acquisition permettant l'interfaçage avec le logiciel* `LatisPro`*, logiciel* `SciDavis`
- *une balance*
- *générateur basse fréquence, oscilloscope, résistances et condensateurs, multimètre, des systèmes électroniques fonctionnels («boîtes noires») réalisant la fonction* suiveur*, amplificateur, sommateur,*
- *accéléromètre.*

> Les boîtes noires sont des dispositifs **actifs** qui doivent être alimentés par une alimentation continue.

I Rappels

> On n'oubliera pas d'imprimer/photographier les courbes quand l'enregistrement aura donné satisfaction.

On étudie un pendule pesant formé d'une tige de masse fixée à l'axe de rotation d'un potentiomètre à 1 tour et d'une masse m dont le centre d'inertie est placé à la distance r de l'axe. On note J_{tige} le moment d'inertie de la tige par rapport à ce même axe[a].
Le système constitue un pendule pesant. On note θ l'angle orienté $(\vec{g}, \overrightarrow{OM})$.



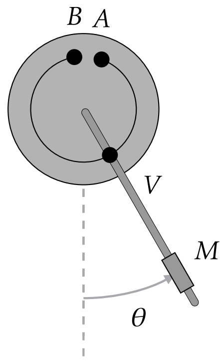
[a]Le moment d'inertie sera défini dans le cours sur le moment cinétique.

Questions :
- *À quelles conditions portant sur la masse de la tige m_t, la masse m, la distance r et la taille caractéristique a de la masse m peut-on considérer que le dispositif constitue un pendule simple ?*
- *Quand ces conditions sont vérifiées, montrer que l'angle θ vérifie l'équation différentielle non linéaire :*
$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 \sin\theta = 0,$$
avec ω_0 une constante qu'on exprimera en fonction de r et m.

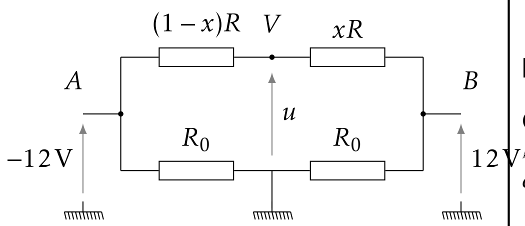
  Dans le cas le plus général, on verra qu'on a :
$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \quad \text{avec :} \quad \omega_0^2 = g\frac{m_{tige}d + mr}{J_{tige} + mr^2}, \tag{1}$$
en notant d la distance du centre d'inertie de la tige à l'axe.
- Pour une faible extension angulaire $\theta_{\max}$, on obtient la solution approchée $\theta = \theta_{\max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$, soit une période $T_0 = 2\pi/\omega_0$.
- Pour des extensions angulaires plus importantes, on peut obtenir un développement de la période à l'ordre 3 en $\theta_{\max} \ll 1$: $T = T_0\left(1 + \frac{\theta_{\max}^2}{16} + o(\theta^4)\right)$ (formule de Borda, voir l'exercice «Oscillations anharmoniques d'un pendule simple» du TD sur les lois de Newton).

II Acquisition des données

L'axe de révolution du pendule est relié à un capteur de déplacement angulaire (un potentiomètre monté dans un pont diviseur de tension) délivrant une tension U variant linéairement avec l'angle θ. On utilise `LatisPro` pour enregistrer l'évolution de θ.



(a) Capteur angulaire utilisant un potentiomètre à un tour.La résistance entre M et A (resp. (M) et B)est proportionnelle à l'angle $\pi - \theta$ (resp. $(\pi + \theta)$).



(b) Montage électrique dans lequel est inséré le potentiomètre AMB.La tension u est proportionnelle à l'ange θ.

On veillera à enregistrer suffisamment de points par période pour pouvoir identifier une sinusoïde.

On utilisera l'alimentation $15\,\mathrm{V}, -15\,\mathrm{V}$, plus stable que celle de la carte `Sysam`. On reliera alors la borne médiane (correspondant à $0\,\mathrm{V}$) à la masse du circuit (oscilloscope, carte `Sysam`).

II.1 Capteur angulaire

Le capteur angulaire est un potentiomètre à un tour alimenté par des sources idéales de tension $-12\,\mathrm{V}; 12\,\mathrm{V}$ intégrées à la carte d'acquisition (on pourra éventuellement utiliser une alimentation indépendante $-15\,\mathrm{V}; 15\,\mathrm{V}$, fournissant une tension plus stable).

Questions :

✍ *Montrer que le montage électrique ci-dessus (nommé pont de Wheatstone) permet d'obtenir une tension u proportionnelle à l'angle θ.*

Manipulations :

- *Observer les valeurs de la tension u quand on fait tourner le pendule axe. Vérifier l'accord avec le modèle proposé.*
- *Réaliser l'enregistrement de quelques oscillations du pendule.*
- ⏲ *Proposer un montage utilisant une boite noire pour ramener les valeurs extrémales de la tension u entre $-10\,\mathrm{V}$ et $10\,\mathrm{V}$, valeurs maximales admises par la carte d'acquisition. On pourra choisir d'avoir $u = 4{,}5\,\mathrm{V}$ pour $\theta = 90°$ pour faciliter l'interprétation.*

On pourra être amené à faire tourner le capteur **avant d'y fixer la tige** pour que la valeur $u = 0$ corresponde à la position d'équilibre stable du pendule.

II.2 Dérivation analogique

Questions :

✍ *Proposer un montage réalisant un filtre pseudo-dérivateur utilisant un résistor de résistance R et un condensateur de capacité C.*

- *Rappeler l'expression de sa fréquence de coupure f_c et de son gain en fonction de R et C.*
- *Quelle inégalité doit vérifier le produit RC pour qu'un signal sinusoïdal de fréquence f_0 soit dérivé. Quelle sera alors le gain du filtre ?*
- *En déduire un couple de paramètres R et C permettant de dériver le signal du pendule dont la fréquence d'oscillations sera de l'ordre de $1\,\mathrm{Hz}$.*

Manipulations :

- *Utiliser les dipôles et boites noires à disposition pour produire une tension v qui représente fidèlement la dérivée analogique de u.*
- ⏲ *Vérifier rapidement à l'oscilloscope le fonctionnement du montage obtenu sur des signaux produits par le **GBF**, pour des fréquences du même ordre que celles du pendule.*
- *Qu'observe-t-on pour des fréquences très supérieures à l'ordre de grandeur de la fréquence d'oscillations du pendule ?*

II.3 Filtrage

Le signal obtenu peut présenter des composantes variables, dues non pas aux oscillations du pendule mais aux défauts des appareils, qu'on souhaite éliminer.

Manipulations :

- *Proposer un filtre passif permettant d'éliminer les composantes à $50\,\mathrm{Hz}$ dues à l'alimentation du réseau électrique.*
- *En déduire les modifications à adapter au montage précédent pour en supprimer les composantes à $50\,\mathrm{Hz}$ sans modifier les caractéristiques du montage dérivateur. On pourra utiliser un montage **suiveur**.*

II.4 Étude de l'accélération

Bien qu'on puisse dériver numériquement ou analogiquement le signal jusqu'à obtenir l'accélération angulaire, cette méthode n'est pas appropriée car :

- le signal obtenu serait très bruité,
- on n'obtiendrait ainsi que l'accélération et pas la composante radiale.

On utilise un accéléromètre fixé au moyen de `patafix` sur la masse du pendule. Il s'agit d'un composant électronique dont l'accélération induit une déformation microscopique produisant une tension mesurable.

> Les composants utilisés donnent l'accélération selon deux directions notées X et Y. Ils doivent être calibrés (dans **LatisPro**) en étant placés successivement sur chacune des 4 faces orthogonales aux directions de l'accélération mesurée.

On rappelle qu'on a, pour un pendule simple :

- $a_\theta = \ell\ddot{\theta}$,
- $a_r = -\frac{v^2}{\ell}$,

Une étude énergétique montre par ailleurs que pour un pendule lâché depuis l'horizontale, la vitesse lorsqu'il passe au point le plus bas est $\sqrt{2g\ell}$.

Manipulations :

- *Enregistrer les composantes de l'accélération et l'angle lors d'une oscillation depuis l'horizontale*
- *Vérifier l'accord des valeurs de a_r et $a\theta$ mesurées avec le modèle.*
- *Comparer la valeur de (a_r) à g lors du passage par le point le plus bas. En déduire l'intensité de la force de contact entre la tige et la masse en ce point.*

III Étude qualitative des frottements

> Pour cette étude, on se place à $r = 25\,\text{cm}$ et on réalisera des oscillations de grande amplitude.

Manipulations :
On réalisera :

un frottement fluide *à l'aide d'une plaque en plastique fixée sur la tige (sur son extrémité la plus proche de l'axe)*

un frottement solide *en fixant un fil plus ou moins tendu (à l'aide du ressort) frottant sur l'axe du pendule.*

Enregistrer environ une cinquantaine de pseudo périodes

- *pour le frottement fluide,*
- *pour le frottement solide,*
- *et en l'absence de dispositif de frottement supplémentaire.*

On enregistra simultanément la tension représentant l'angle et celle représentant la vitesse sur deux entrées analogiques différentes de la carte d'acquisition.

Exploitation :

- *Caractériser les courbes $\theta(t)$ (pseudopériode T, amortissement exponentiel ou linéaire, durée caractéristique de l'amortissement τ).*
- *Représenter les trajectoires dans l'espace des phases ie l'ensemble des courbes $(\theta, \dot{\theta})$. On y distinguera les conditions initiales, le sens de parcours, le point attracteur.*

IV Étude de la période ⌚

> Pour cette étude, on place le centre d'inertie de la masse à la distance $d = 40\,\text{cm}$.

Manipulations :
Enregistrer quelques oscillations du pendule pour différentes valeurs de l'amplitude θ_{max}.

Exploitation :

- *Mesurer (par `Outils->Mesures Automatiques`) leur période.*
- *Tracer, dans `SciDavis` $T - T_0$ en fonction de θ_{max}^2. Vérifier la loi de Borda.*